



Inspectoratul Școlar Județean Timiș

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
5.02.2026

Clasa a VIII-a
Barem de corectare și notare

(20p) 1. Fie numerele $a = \sqrt{2^{2026} - 2^{1015} + 2^{1014} + 1}$ și $b = \sqrt{2^{2026} - 2^{1014} + 2^{1015} + 1}$.

a) Arătați că a și b sunt numere naturale impare consecutive.

b) Comparați numerele $5b - 3a$ și $\sqrt{7^{676}}$.

Soluție:

a)

$$2^{2026} - 2^{1015} + 2^{1014} + 1 = 2^{2026} - 2^{1014}(2 - 1) + 1 = \dots\dots\dots 2p$$

$$= (2^{1013})^2 - 2 \cdot 2^{1013} + 1 = (2^{1013} - 1)^2 \dots\dots\dots 3p$$

$$a = |2^{1013} - 1| = 2^{1013} - 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$2^{2026} - 2^{1014} + 2^{1015} + 1 = 2^{2026} + 2^{1014}(2 - 1) + 1 = \dots\dots\dots 2p$$

$$= (2^{1013})^2 + 2 \cdot 2^{1013} + 1 = (2^{1013} + 1)^2, \text{ deci } b = 2^{1013} + 1 \dots\dots\dots 4p$$

Numerele a și b sunt numere naturale impare, iar $a + 2 = b$, deci a și b sunt numere naturale impare consecutive.....2p

b)

$$5b - 3a = 5 \cdot (2^{1013} + 1) - 3 \cdot (2^{1013} - 1) = 2 \cdot 2^{1013} + 8 = 8 + 2^{1014} = 8 + 8^{338} \dots\dots\dots 3p$$

$$\sqrt{7^{676}} = 7^{338}, 8 + 8^{338} > 7^{338}, \text{ deci } 5b - 3a > \sqrt{7^{676}} \dots\dots\dots 2p$$

(20p) 2. În tetraedrul $ABCD$ notăm cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor AD, AB, BC respectiv CD . Se știe că $m(\sphericalangle(AC, BD)) = 90^\circ$.

a) Arătați că $m(\sphericalangle MNP) = 90^\circ$.

b) Arătați că, dacă $AC=BD$, atunci $MNPQ$ este pătrat.

Supliment G.M. 10/2025

Soluție:

a) MN linie mijlocie în $\triangle ABD \Rightarrow MN \parallel BD \dots\dots\dots 2p$

NP linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow NP \parallel AC \dots\dots\dots 2p$



- $m(\sphericalangle MNP) = m(\sphericalangle(AC, BD)) = 90^\circ$ 3p
- b) $MN \parallel BD, PQ \parallel BD \Rightarrow MN \parallel PQ$ (1).....2p
- $MQ \parallel AC, NP \parallel AC \Rightarrow MQ \parallel NP$ (2).....2p
- Din (1) și (2) rezultă $MNPQ$ paralelogram.....2p
- $m(\sphericalangle MNP) = 90^\circ \Rightarrow MNPQ$ dreptunghi.....2p
- $MN = \frac{1}{2} \cdot BD, NP = \frac{1}{2} \cdot AC, BD = AC \Rightarrow MN = NP$, deci $MNPQ$ pătrat.....5p

(20p) 3. Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$ cu muchia $AB = a$ cm și punctul M mijlocul muchiei $D' C'$.

- a) Demonstrați că $AD \parallel (BCM)$.
- b) Calculați distanța de la punctul D la planul (BCM) .
- c) Dacă distanța dintre dreptele AD și BM este egală cu $4\sqrt{5}$ cm, determinați a .

Soluție:

- a) $AD \parallel BC, BC \subset (BCM), AD \not\subset (BCM) \Rightarrow AD \parallel (BCM)$3p
- b) Fie $DE \perp CM, E \in CM$
- $BC \perp (DCC'), DE \subset (DCC') \Rightarrow BC \perp DE \Rightarrow DE \perp BC$2p
- $DE \perp CM, DE \perp BC \Rightarrow DE \perp (BCM)$2p
- În $\triangle CC'M$ dreptunghic în C' , $CM = \sqrt{C'C^2 + C'M^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$2p
- Scriind aria triunghiului CDM în două moduri se obține $CM \cdot DE = CD \cdot d(M, DC)$...2p
- $\Rightarrow CM \cdot DE = DC \cdot CC' \Rightarrow DE = \frac{CD \cdot CC'}{CM} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ cm.....3p
- c) $AD \parallel (BCM)$ și $AD \not\parallel BM \Rightarrow d(AD, BM) = d(AD, (BCM)) = d(D, (BCM)) =$
- DE3p
- $DE = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ cm $\Rightarrow \frac{2a\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5} \Rightarrow a = 10$3p

(30p) 4. a) Dacă $x, y \in (0, \infty)$ și $k \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că $\sqrt{(x+k)(y+k)} \geq k + \sqrt{xy}$.

b) Demonstrați că:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+1)(y+1)}} + \frac{x+y+2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2)(y+2)}} + \dots + \frac{x+y+2026}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2026)(y+2026)}} \geq 2026, \text{ pentru orice numere reale } x, y \in (0, \infty).$$



Soluție:

a) $\sqrt{(x+k)(y+k)} \geq k + \sqrt{xy} \Leftrightarrow (x+k)(y+k) \geq k^2 + xy + 2k\sqrt{xy}, \forall x, y \in (0, \infty)$ și $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dots \dots \dots 3p$

Prin calcul se obține $xk + yk \geq 2k\sqrt{xy} \dots \dots \dots 3p$

Inegalitatea inițială este echivalentă cu $(\sqrt{xk} - \sqrt{yk})^2 \geq 0, \forall x, y \in (0, \infty), \forall k \in \mathbb{N}^*$, care este adevărată. $\dots \dots \dots 4p$

b) Din a) rezultă $\sqrt{(x+k)(y+k)} - \sqrt{xy} \geq k$, de unde $\frac{(x+k)(y+k)-xy}{\sqrt{(x+k)(y+k)+\sqrt{xy}}} \geq k \dots \dots \dots 5p$

Se obține $\frac{xk+yk+k^2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+k)(y+k)}} \geq k$, deci $\frac{x+y+k}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+k)(y+k)}} \geq 1$, pentru $x, y > 0$ și $k \in \mathbb{N}^*, \dots \dots \dots 5p$

Pentru $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2026\}$ se obțin inegalitățile:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+1)(y+1)}} \geq 1, \frac{x+y+2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2)(y+2)}} \geq 1, \dots, \frac{x+y+2026}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2026)(y+2026)}} \geq 1 \dots \dots \dots 5p$$

Prin însumarea inegalităților anterioare se obține inegalitatea:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+1)(y+1)}} + \frac{x+y+2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2)(y+2)}} + \dots + \frac{x+y+2026}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2026)(y+2026)}} \geq 2026, \forall x, y \in (0, \infty) \dots \dots \dots 5p$$